УДК 519.624, 534.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ,УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА КОНЦЕ БАЛКИ ЭЙЛЕРА - БЕРНУЛЛИ, А ТАКЖЕ МАССЫ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ГРУЗА, СОСРЕДОТОЧЕННОГО НА ЭТОМ КОНЦЕ

А.А. Аитбаева

Аннотация

В настоящей работе рассматривается задача идентификации коэффициента жесткости пружины, закрепленной на одном из концов балки Эйлера-Бернулли, а также массы и момента инерции груза, сосредоточенного на этом конце, по собственным частотам колебаний балки. Показано, что для однозначной идентификации трех неизвестных - коэффициента жесткости пружины, массы и момента инерции груза, достаточно использовать пять собственных частот. Для решения задачи предложен метод дополнительных неизвестных величин. С помощью этого метода построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову. Приведены формулы идентификации и соответствующие примеры.

Ключевые слова: (собственные значения, обратная задача, собственные частоты, балка, сосредоточенный инерционный элемент, коэффициент жесткости пружины)

1. Постановка обратной задачи

В работах [1] – [3] приводятся задачи идентификации видов и параметров закреплений стержней и балок. В монографии [1] обобщаются результаты идентификации краевых условий в случае, когда отыскиваются все их коэффициенты. В отличие от этих работ, здесь идентифицируются коэффициент жесткости пружины и параметры сосредоточенного инерционного элемента - масса и момент инерции груза - прикрепленному к концу балки. Ранее подобная задача не рассматривалась.

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан; на правом конце сосредоточен груз массой m_1 и момнтом инерции I_1, который упруго закреплен на пружинке с жесткостью c_1, препятствующая вертикальному смещению балки. Требуется найти m_1, I_1, c_1 по собственным частотам колебаний балки.

Отклонения точек оси балки от начального состояния (при $t = 0$) при поперечных колебаниях однозначно определяются одной функцией двух переменных - осевой координаты X и времени $t : U = U(X,t)$. Уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [4]:

$$EI\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2},$$

где $U = U(X,t)$ - прогиб оси балки, EI- изгибная жесткость, ρ - плотность балки, F- площадь поперечного сечения стержня. При $t = 0$ должны выполняться начальные условия

$$U(X,0) = f(X), \qquad \frac{\partial U(X,0)}{\partial t} = g(X),$$

где $f(X)$, $g(X)$ - функции, определяющие начальное положение оси стержня.

Если левый конец заделан, а на правом конце имеется упруго закрепленный сосредоточенный инерционный элемент, то краевые условия записываются в следующем виде:

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

при $(X = 0)$,

$$EI\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + c_1 U = m_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad EI\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -I_1\frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2},$$

при $(X = L)$. Вводя обозначения $x = X/L, u = U/L$, запишем уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня и краевые условия следующим образом:

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

при $x = 0$: $u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

при $x = 1$: $EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_1 L^3 u = -m_1 L^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -I_1 L \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}$.

Тогда, при замене $u(x,t) = y(x)cos(\omega t)$, поставленная выше задача сводится (см., например, [5]) к следующей спектральной задаче [4]:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad U_1 = y(0) = 0, \quad U_2 = y'(0) = 0; \tag{1}$$

$$U_3(y) = y'''(1) + (a_1 - a_2\lambda^4)y(1) = 0, \quad U_4(y) = y''(1) - a_3\lambda^4 y'(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $a_1 = (c_1 L^3)/(EI)$, $a_2 = m_1/(\rho F L)$, $a_3 = I_1/(\rho F L^3)$, $\lambda^4 = \rho F L^4 \omega^2/(EI)$.

Таким образом, имеем краевую задачу (1), (2) со спектральным параметром λ и неизвестными коэффициентами a_i $(i = 1, 2, 3)$. Требуется по ее собственным значениям λ_k найти неизвестные коэффициенты a_i $(i = 1, 2, 3)$, то есть поставленную задачу определения массы и момента инерции груза, сосредоточенного на упругозакрепленном конце стержня, свели к обратной. Эту обратную задачу переформулируем в терминах характеристического определителя.

Функции $y_1(x,\lambda) = (\cos\lambda x + \cosh\lambda x)/2$, $y_2(x,\lambda) = (\sin\lambda x + \sinh\lambda x)/(2\lambda)$, $y_3(x,\lambda) = (-\cos\lambda x + \cosh\lambda x)/(2\lambda^2)$, $y_4(x,\lambda) = (-\sin\lambda x + \sinh\lambda x)/(2\lambda^3)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda) = \lambda^4 y(x,\lambda), \tag{3}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \qquad j,\ r = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{4}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\lambda)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [4]). О бщее решение уравнения (3) представляется в следующем виде

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) + C_3 y_3(x,\lambda) + C_4 y_4(x,\lambda).$$

Для нахождения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используем краевые условия (1), (2):

$$\begin{aligned} &U_i(y) = U_i(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4) = C_1 U_1(y_1) + C_2 U_2(y_2) + \\ &+ C_3 U_3(y_3) + C_4 U_4(y_4) \quad (i = \overline{1,4}) \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (1), (2) следует из условия существования ненулевого решения системы (5). Ненулевое решение для существует тогда и только тогда, когда равняется нулю определитель системы:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix} \qquad (6)$$

Выражение (6) называется характеристическим определителем спектральной задачи (1) , (2). Его нули совпадают с собственными значениями этой задачи. Учитывая условия (4), из (6) получаем

$$\Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix}.$$

Отсюда, с учетом (1), (2), имеем

$$\Delta(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} y_3'''(1)+a_1y_3(1)-a_2\lambda^4y_3(1) & y_4'''(1)+a_1y_4(1)-a_2\lambda^4y_4(1)\\ y_3''(1)-a_3\lambda^4y_3'(1) & y_4''(1)-a_3\lambda^4y_4'(1)\end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta(\lambda)\equiv-f_0(\lambda)+a_1f_1(\lambda)+a_2f_2(\lambda)+a_3f_3(\lambda)+a_1a_3f_4(\lambda)+a_2a_3f_5(\lambda), \qquad (7)$$

где $f_0(\lambda)=(1+\cos\lambda\cosh\lambda)/2$; $f_1(\lambda)=(-\cos\lambda\sinh\lambda+\sin\lambda\cosh\lambda)/(2\lambda^3)$; $f_2(\lambda)=-\lambda^4f_1(\lambda)$; $f_3(\lambda)=\lambda^3(\sin\lambda\cosh\lambda+\cos\lambda\sinh\lambda)/2$; $f_4(\lambda)=(\cos\lambda\cosh\lambda-1)/2$; $f_5(\lambda)=-\lambda^4f_4(\lambda)$. Таким образом, задачу идентификации краевых условий по собственным частотам в терминах функции (7) можно сформулировать следующим образом: требуется найти неизвестные коэффициенты a_i $(i=1,2,3)$ по известным корням λ_k характеристического определителя (7) .

2. Метод системы трех нелинейных уравнений

Пусть λ_k являются собственными значениями краевой задачи (1), (2). Тогда λ_k - корни уравнения характеристического определителя (7) [6]. Подставляя значения в (7), получаем систему уравнений для отыскания неизвестных $a_i\,(i=1,2,3)$:

$$a_1f_1(\lambda_k)+a_2f_2(\lambda_k)+a_3f_3(\lambda_k)+a_1a_3f_4(\lambda_k)+a_2a_3f_5(\lambda_k)=f_0(\lambda_k). \qquad (8)$$

Сколько нужно собственных значений для однозначной идентификации коэффициентов a_1,a_2,a_3 ? Рассмотрим решение системы трех нелинейных уравнений, для этого приведем следующий пример.

Пример 1. Пусть $\lambda_1=0,735119$, $\lambda_2=4,616818$, $\lambda_3=7,785263$ первые три собственных значения краевой задачи (1), (2). Подставим их в (8), получаем систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными, имеющую три набора решений (эти решения найдены с помощью пакета аналитических вычислений Maple:

$$\begin{gathered}\{a_1=1,000;\quad a_2=1,999;\quad a_3=2,999\}\,,\\ \{a_1=-10,036;\quad a_2=2,009;\quad a_3=8,240\}\,,\\ \{a_1=2,297;\quad a_2=-0,013;\quad a_3=-0,006\}\,.\end{gathered} \qquad (9)$$

В физческом смысле нам подходит первый набор решений, т.к. коэффициенты a_1, a_2, a_3 не могут быть отрицательными. Но ведь может оказаться, что два или все три набора решений будут неотрицательными. Следовательно нужно воспользоваться други методом решения.

Возьмем дополнительно четвертое собственное значение $\lambda_4 = 10,948043$. Заменяем в предыдущей системе уравнений третье уравнение на четвертое, которое получили при подстановки в (8). Получается три решения:

$$\begin{array}{l}\{a_1 = 1,000;\quad a_2 = 1,999;\quad a_3 = 2,999\}\,,\\ \{a_1 = -12,128;\quad a_2 = 2,005;\quad a_3 = 8,703\}\,,\\ \{a_1 = 2,297;\quad a_2 = -0,013;\quad a_3 = -0,006\}\,.\end{array} \tag{10}$$

Решение системы трех нелинейных уравнений (8) с $\lambda_1 = 0,735119$, $\lambda_3 = 7,785263$, $\lambda_4 = 10,948043$ имеет вид:

$$\begin{array}{l}\{a_1 = 1,000;\quad a_2 = 1,999;\quad a_3 = 2,999\}\,,\\ \{a_1 = -31,996;\quad a_2 = 2,005;\quad a_3 = 10,929\}\,,\\ \{a_1 = 2,297;\quad a_2 = -0,013;\quad a_3 = -0,007\}\,.\end{array} \tag{11}$$

При $\lambda_2 = 4,616818$, $\lambda_3 = 7,785263$, $\lambda_4 = 10,948043$ из решения (8) также следуют три набора решений:

$$\begin{array}{l}\{a_1 = 1,000;\quad a_2 = 1,999;\quad a_3 = 2,999\}\,,\\ \{a_1 = -1801,830;\quad a_2 = 2,179;\quad a_3 = -0,119\}\,,\\ \{a_1 = 2,829;\quad a_2 = -0,013;\quad a_3 = -0,007\}\,.\end{array} \tag{12}$$

Видно, что приближенное решение $\{\, a_1 = 1,000;\quad a_2 = 1,999;\quad a_3 = 2,999\}$ является общим для всех систем уравнений. Однако данный метод не дает ответа на вопрос, достаточно ли четырех собственных значений для однозначной идентификации коэффициентов a_1, a_2, a_3, так как в некоторых численных экспериментах возникает второй набор общих решений. В нашем случае это третий набор решений в (9), (10), (11), (12), которые совпадают с точностью до двух-четырех значащих цифр. Можно ли считать вторые решения общими? Для ответа на поставленный вопрос ниже приведем, метод решения системы (8), из которого следует общая теорема, утверждающая, что для выделения единственного решения достаточно пяти собственных значений. Эта теорема также дает ответ на вопрос об общности вторых решений. И ответ этот - отрицательный.

3. Метод дополнительных неизвестных

Пусть λ_1, $\lambda_2, \ldots ,\lambda_5$ - собственные значения задачи (1), (2). Вводим дополнительные неизвестные

$$a_4 = a_1 a_3, \qquad a_5 = a_2 a_3 \tag{13}$$

и подставляем их вместе с собственными значениями λ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$ в уравнение (8). В результате получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными a_i $(i = 1, 2, ..., 5)$:

$$\begin{array}{l} a_1 f_1(\lambda_k) + a_2 f_2(\lambda_k) + a_3(\lambda_k) + a_4 f_4(\lambda_k) + a_5 f_5(\lambda_k) = f_0(\lambda_k)\\ (k = 1, 2, ..., 5).\end{array} \tag{14}$$

Из правила Крамера следует, что если определитель системы уравнений (14)

$$D = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) & \dots & f_5(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) & \dots & f_5(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_5) & f_2(\lambda_5) & \dots & f_5(\lambda_5) \end{vmatrix} \tag{15}$$

отличен от нуля, то коэффициенты a_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ однозначно вычисляются по формулам

$$a_1 = D_1/D, \quad a_2 = D_2/D, \quad a_3 = D_3/D, \tag{16}$$

$$a_4 = D_4/D, \quad a_5 = D_5/D, \tag{17}$$

где D_i - определитель, получающийся из D при замене элементов $f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), \dots, f_i(\lambda_5)$ i-го столбца соответствующими свободными членами $f_0(\lambda_1), f_0(\lambda_2), \dots, f_0(\lambda_5)$.

В случае, если собственные значения λ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$ найдены с погрешностью, то может оказаться, что

$$\begin{aligned} (D_4/D) &\neq (D_1/D) \cdot (D_3/D), \\ (D_5/D) &\neq (D_2/D) \cdot (D_3/D), \end{aligned} \tag{18}$$

и тогда система уравнений для определения трех неизвестных a_i $(i = 1, 2, 3)$ становится переопределенной. То есть задача отыскания неизвестных a_i $(i = 1, 2, 3)$ по пяти значениям λ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$ может не иметь решения, а поэтому является некорректной по Адамару. Однако она корректна по А.Н. Тихонову.

Для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $M \subset V$, существенно более узкое, чем все пространство V. Пусть образ множества M в пространстве Z при отображении с помощью оператора R есть множество Λ , то есть $\Lambda = RM$.

Задача $Rv = z$, где v из пространства V, а z из пространства Z, называется корректной по А.Н. Тихонову (условно корректной), если [7], [8], [9]:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству M пространства V;

2) решение единственно на множестве M;

3) для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \tilde{z} \in \Lambda = RM$, и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_Z < \delta$, выполняется неравенство $\|v - \tilde{v}\|_V < \epsilon$.

В обсуждаемом случае под оператором R можно понимать отображение, задаваемое системой уравнений (14), преобразующее пятерку чисел a_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ в пятерку значений λ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$, при которых матрица системы имеет определитель $D \neq 0$. Множеством корректности M будем называть такое множество пятичисельных наборов $v = (a_1, a_2, ..., a_5)$, для каждого из которых выполняются условия (13). С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А.Н. Тихонову задачи отыскания a_i $(i = 1, 2, 3)$ по значениям λ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$, при которых система уравнений (14), имеет определитель, отличный от нуля.

Пусть V - это пространство R^5 элементов $v = (v_1, v_2, ..., v_5)$, с нормой $\|v\| = max(|v_1|, |v_2|, ..., |v_5|)$; Z - это пространство R^5 элементов $z = (z_1, z_2, ..., z_5)$ с нормой $\|z\| = max(|z_1|, |z_2|, ..., |z_5|)$; образ множества M в пространстве Z при отображении с помощью оператора R есть множество Λ , то есть $\Lambda = RM$. Тогда задача

$Rv = z$ будет корректной по А.Н. Тихонову, так как все перечисленные выше условия выполнены (третье условие вытекает из аналитичности $f_i(\lambda)$ $(i = 0, 1, ..., 5)$ по λ).

Наиболее известны два метода решения корректных по А.Н. Тихонову задач - метод квазирешения и метод подбора. В данной работе предлагается метод решения задачи идентификации краевых условий, который по сути представляет собой метод подбора.

Априори известно, что искомые числа a_i $(i = 1, 2, 3)$ существуют, так как идентифицируется реально существующая механическая система. Если действительные собственные значения λ_1, λ_2, ..., λ_5 и определители $D \neq 0$, $D_i(i = 1, ..., 5)$ найдены точно, то условия (13) выполнены, причем числа a_i $(i = 1, 2, 3)$ однозначно вычисляются по формулам (16). Все условия корректности по А.Н. Тихонову реализованы, в том числе и третье. Действительно, для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_5)$, $\tilde{z} = (\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2}, ..., \tilde{\lambda_5}) \in \Lambda = RM$, и таких, что $\|z - \tilde{z}\|_{R^5} < \delta$, соблюдается неравенство $\left\|(D_1/D, D_2/D, ..., D_5/D) - (\tilde{D_1}/D, \tilde{D_2}/D, ..., \tilde{D_5}/D)\right\|_{R^5} < \epsilon$. Последнее вытекает из аналитичности функций $f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, ..., 5)$ по параметру λ.

Если числа λ_k $(k = 1, 2, ...5)$, а значит, и $D \neq 0$, $D_1, D_2, ..., D_5$ установлены приближенно, то равенство (18) может не существовать, и поэтому формально по определителям $D \neq 0$, $D_1, D_2, ..., D_5$ (формулам Крамера) неизвестные a_i $(i = 1, 2, 3)$ вычислить невозможно. Однако для предъявления приближенного решения (18) и не нужно. Приближенным решением будем считать значения a_i $(i = 1, 2, 3)$, найденные по формулам (16), где определители $D \neq 0$, $D_1, D_2, ..., D_5$ рассчитываются по приближенным λ_k $(k = 1, 2, ...5)$. Приближенные решения a_i $(i = 1, 2, 3)$ вместе с числами a_i $(i = 4, 5)$, определяемыми по формулам (13), а не по (17), лежат во множестве корректности, так как для них справедливы условия (13). Эти приближенные решения для a_i $(i = 1, 2, ..., 5)$ тем ближе к точным, чем ближе к точным собственным значениям числа λ_k $(k = 1, 2, ...5)$, а значит, чем ближе к точным значениям определители $D \neq 0$, $D_1, D_2, ..., D_5$. Таким образом, верна теорема:

Теорема 1. *Если λ_k $(k = 1, 2, ...5)$ являются действительными собственными значениями краевой задачи (1), (2), причем определитель (15) системы уравнений (14) отличен от нуля, то задача отыскания коэффициентов по собственным значениям является корректной по А.Н. Тихонову, и ее единственное решение описывается формулами (16), (17).*

Пример 2. Пусть собственные значения задачи такие же, как в примере 1, а именно $\lambda_1 = 0,735119$, $\lambda_2 = 4,616818$, $\lambda_3 = 7,785263$, $\lambda_4 = 10,948043$, $\lambda_5 = 14,10053$. Подставляя эти значения в (15), (16) и находя $D = -6,859939630 \cdot 10^{13}$, $D_1 = -7,189451434 \cdot 10^{13}$, $D_2 = -1,337629406 \cdot 10^{14}$, $D_3 = -2,006758818 \cdot 10^{14}$, получаем единственное решение: $a_1 = D_1/D = 1,000$, $a_2 = D_2/D = 2,000$, $a_3 = D_3/D = 3,000$ Доказанная теорема и последние два примера показывают, что для выделения единственного решения достаточно семи собственных значений, а второе решение из первого примера следует исключить.

Предложенный метод дополнительных неизвестных величин позволил построить множество корректности задач и доказать их корректность по А.Н. Тихонову. Проделанные выкладки, сформулированная теорема и примеры свидетельствуют, что для однозначного определения трех параметров - коэффициента жесткости пружины упругого закрепления конца балки Эйлера - Бернулли , а также массы и момента инерции груза, сосредоточенного на этом конце - достаточно использовать пять собственных значений. И хотя теоремы содержат лишь достаточные условия, которые могут быть далеки от необходимых, они подтверждают достоверность формул для точной и приближенной идентификации параметров закрепления и концевого груза.

Выражаю свою благодарность Ахтямову Азамату Мухтаровичу за постановку задачи и Урманчееву Саиду Федоровичу за помощь в исследовательской работе.

Summary

A.A. Aitbaeva. IDENTIFICATION OF THE STIFFNESS COEFFICIENT OF THE SPRING ATTACHED TO ONE END OF THE EULER-BERNOULLI BEAM AS WELL AS MASS AND MOMENT OF INERTIA OF THE LOAD, WHICH CONCENTRATED ON THIS END.

In this article we consider the problem of identification of the stiffness stiffness coefficient of the spring attached to one end of the Euler-Bernoulli beam as well as mass and moment of inertia of the load, which concentrated on this end, by the natural frequencies of vibrations of the beam. It is shown that for unambiguous identification of the three unknowns - the stiffness of the spring, mass and moment of inertia of the load, it is sufficient to use the five natural frequencies.The problem is solved using the method of additional unknowns. This allows us to determine a correctness set of the problem and to prove the problem is well-posed in the Tikhonov sense. Formulas of identification and the corresponding examples are given.

Key words: (eigenvalues, the inverse problem, the natural frequencies, beam, concentrated inertial element, stiffness coefficient of the spring).

Литература

1. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
2. *Ахтямов А.М., Муфтахов А.В., Ямилова Л.С.* Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал.– 2008. Т. 54, –№ 2. С. 181–188.
3. *Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф.* Определение виброзащитного закрепления трубопровода // ПМТФ. –2008.Т. 49, № 1. С. 139–147.
4. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания нелинейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями – М.: Наука, 1968. – 504 с.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы.– М.: Наука, 1969. – 526 с.
7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. –М.: Наука, 1978. – 206 с.
8. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. –М.: Наука, 1980. – 288 с.
9. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1990. – 232 с.

Аитбаева Айгуль Азаматовна – аспирант, Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН.

E-mail: *phunakoshi@mail.ru*